Dans ce qui suit $\mathbb{Q}$ désigne le corps des nombres rationnels, $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes, $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs. $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ est l'anneau des polynômes à n indéterminées sur $\mathbb{Q}$; j et j^2 sont les racines cubiques complexes de l'unité. P désigne un polynôme $X^3 + pX + q$ de $\mathbb{Q}[X]$. α_1, α_2, α_3 sont trois nombres complexes tels que $\forall x \in \mathbb{C}\ (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = P(x)$. (En d'autres termes, α_1, α_2, α_3 sont les racines de P, prises dans un certain ordre.)

I

1° Soient α et β deux nombres complexes tels que $3\alpha\beta + p = 0$ et $P(\alpha + \beta) = 0$; montrer que α^3 et β^3 sont les racines d'un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ de degré 2 que l'on déterminera. Montrer que les racines de P sont $\alpha + \beta$, $j\alpha + j^2\beta$, $j^2\alpha + j\beta$.

2° Suivant les valeurs de p et q, discuter le nombre de racines réelles de P.

3° Dans le cas où P n'a que des racines réelles, montrer l'existence de réels ρ et θ, ρ positif, tels que les racines de P soient $\rho\cos\theta$, $\rho\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$, $\rho\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$; ρ et θ sont-ils uniques?

II

Si $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{C}$, on désigne par $\mathbb{Q}[a_1, \ldots, a_n]$ l'ensemble des valeurs prises en $(a_1, \ldots, a_n)$ par les polynômes $R(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$.

Montrer que $\mathbb{Q}[a_1, \ldots, a_n]$ est un anneau unitaire (les lois de composition étant l'addition et la multiplication de $\mathbb{C}$) et un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ (la loi de composition externe étant la multiplication).

On posera dans la suite $A_i = \mathbb{Q}[\alpha_i]$ pour $i = 1, 2, 3$ et $A = \mathbb{Q}[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$.

A

1° Montrer que pour $i = 1, 2, 3$, A_i est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ de dimension au plus 3 et que c'est un corps.

2° Montrer que A est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par $1, \alpha + \beta, j\alpha + j^2\beta, \alpha^2 + \beta^2, j^2\alpha^2 + j\beta^2, j\alpha^3 + j^2\beta^3$, α et β étant choisis comme en I. 1°. Montrer que A est un corps.

3° Montrer que pour tout x dans A, il existe y et z dans A_1 tels que $x = y + z\alpha_2$.

4° Soit u un endomorphisme de l'espace vectoriel A. Montrer que si u vérifie $u(1) = 1$ et $u(xy) = u(x)\,u(y)$ pour tout x et tout y de A, alors u est bijectif. Un tel endomorphisme sera appelé *automorphisme* dans la suite. Démontrer que les automorphismes de A forment un groupe.

B

On suppose que P n'est pas irréductible sur $\mathbb{Q}$.

1° Montrer que $\dim A = 1$ ou $\dim A = 2$, et qu'il existe toujours deux indices i et j distincts tels que $A = A_i = A_j$.

2° Dans les cas $\dim A = 1$ et $\dim A = 2$, on déterminera tous les automorphismes de A. (On n'oubliera pas de démontrer que ce sont les seuls.)

C

On suppose P irréductible sur $\mathbb{Q}$.

1° Montrer que $\dim A = 3$ ou $\dim A = 6$.

2° Si $\dim A = 6$, montrer que pour toute permutation σ de l'ensemble des racines de P, il existe un automorphisme u de A vérifiant $u(\alpha_i) = \sigma(\alpha_i)$, pour $i = 1, 2, 3$. Y a-t-il d'autres automorphismes de A?

3° On suppose $\dim A = 6$. Soient les ensembles B_i :

$B_i = \mathbb{Q} \cup \{ a \in A$; a est racine d'un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ irréductible de degré $i \}$.

On a $B_1 = \mathbb{Q}$.

a. Soit σ une permutation de l'ensemble des racines. u l'automorphisme associé (comme en II. **C.** 2°); soit $x \in A$ tel que $u(x) = x$; si σ est une permutation circulaire, montrer que x appartient au sous-espace vectoriel engendré par 1 et $j\alpha^3 + j^2\beta^3$; si σ est une transposition, montrer que $x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

.../...

×16×
E.N.S. SAINT-CLOUD & FONTENAY Option Mathématiques (M')
MATHEMATIQUES I (4 h) 1977

b. Montrer que $B_2 \cap B_3 = B_1$.

c. Déterminer B_1, B_2 et B_3.

d. Déterminer B_4, B_5 et B_6.

D

On suppose P irréductible sur $\mathbb{Q}$.

1° Soient i et j deux entiers distincts inférieurs ou égaux à 3. Montrer que $\dim A = 3$ si et seulement si α_i appartient à A_j.

Déterminer alors tous les automorphismes de A.

2° Montrer que $\dim A = 3$ si et seulement si il existe un rationnel r tel que $r^2 = -3\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)$.

3° Montrer que $\dim A = 3$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) les trois racines de P sont réelles

(ii) $\rho \cos\left(3\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ et $\rho \cos\left(3\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ sont rationnels, ρ et θ étant définis comme en I. 3°.

4° *a.* Soit $t \in \mathbb{Z}$, $t \neq 0$, soit u un entier strictement supérieur à 2, tel que t et u soient premiers entre eux, soit enfin λ un nombre réel.

Montrer que si $\cos\lambda = \frac{t}{u}$, l'ensemble $\{\cos(n\lambda) ; n \in \mathbb{N}\}$ est infini.

En déduire que les seules valeurs rationnelles de $\cos(s\pi)$ pour s dans $\mathbb{Q}$ sont -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$ et 1.

b. Déterminer tous les couples (ρ, θ) associés (au sens de I. 3°) à un polynôme $P(X) = X^3 + pX + q$ tel que $\dim A = 3$, et tels que θ soit un multiple rationnel de π.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail